S3 économie 2013-2014

Correction du TD série 1

Faculté des Sciences Juridiques-Economiques et Sociales - Meknes 2013 / 2014	T.D d'ALgebre S3	
	Serie N° 1	par Outouzzalt Hassan.

les exercices 1; 2 et 3 sont deja corrigés le mardi 22 octobre 2013.

Ex4

• 1) montrons que : $A = \{(x,y,z,t) / x+y = z+t = 0\}$ est un espace vect. sur $\mathbb{R}$.

$(0,0,0,0) \in A \Rightarrow A \neq \emptyset$

(i) on a : $(0,0,0,0)$

(ii) : $\forall (x,y,z,t), (x',y',z',t') \in A$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

$$\alpha.(x,y,z,t) + (x',y',z',t') = (\underbrace{\alpha x+x'}_{X}, \underbrace{\alpha y+y'}_{Y}, \underbrace{\alpha z+z'}_{Z}, \underbrace{\alpha t+t'}_{T})$$

$$= (X, Y, Z, T).$$

$$X+Y = \alpha x + x' + \alpha y + y' = \alpha \underbrace{(x+y)}_{=0} + \underbrace{x'+y'}_{=0} = 0$$

$$Z+T = \alpha z + z' + \alpha t + t' = \alpha \underbrace{(z+t)}_{0} + \underbrace{z'+t'}_{0} = 0.$$

donc A verifie la propriété caractéristique des sous-esp. vect donc A est un sous-esp. vect de $(\mathbb{R}^4,+,.)$ d'ou A est un esp. vect.

• de même montrons que $B = \{(a,b,3a,2a), a,b \in \mathbb{R}\}$ est un sous esp. vect de $\mathbb{R}^4$.

• on a $(0,0,0,0) \in B \Rightarrow B \neq \emptyset$. (i)

• soit $\alpha \in \mathbb{R}$ $(a,b,3a,2a)$; $(x,y,3x,2x) \in B$

montrons que $\alpha.(a,b,3a,2a) + (x,y,3x,2x) \in B$.

$$\alpha.(a,b,3a,2a)+(x,y,3x,2x)=(\alpha a,\alpha b,3\alpha a,2\alpha a)+(x,y,3x,2x)$$

$$=(\alpha a+x,\alpha b+y,3(\alpha a+x),2(\alpha a+x))$$

$$=(X\ ;Y,3X,2X)\in B$$

donc B vérifie la propriété caractéristique des sous-esp. vect d'où B est un sous-esp vect de $\mathbb{R}^4$.

---

2) base de A

$(x,y,z,t)\in A \Longleftrightarrow x+y=z+t=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ t=-z \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow (x,y,z,t)=(x,-x,z,-z)$$

$$=(x,-x,0,0)+(0,0,z,-z)$$

$$=x(1,-1,0,0)+z(0,0,1,-1)$$

$$=x\ e_1+z\ e_2$$

$\Rightarrow (e_1,e_2)$ est une famille génératrice de A, reste à montrer que (e_1,e_2) est libre.

soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tels que $\alpha.e_1+\beta.e_2=(0,0,0,0)$ alors.

$(\alpha,-\alpha,\beta,-\beta)=(0,0,0,0)\Rightarrow(\alpha=\beta=0)\Rightarrow$ (e_1,e_2) libre d'où (e_1,e_2) est une base de A et $\dim A=2$.

base de B

on a : $(a, b, 3a, 2a) = a\underbrace{(1,3,0,2)}_{\vec{u_1}} + b\underbrace{(0,1,0,0)}_{\vec{u_2}}$

$= a \; u_1 + b \; u_2$

donc (u_1, u_2) est une famille génératrice de B.

reste à prouver que (u_1, u_2) est libre.

soit α et β dans $\mathbb{R}$ tels que : $\alpha . u_1 + \beta . u_2 = (0,0,0,0)$

alors $(\alpha, 3\alpha, \beta, 2\alpha) = (0,0,0,0)$ d'où $\alpha = \beta = 0$

donc (u_1, u_2) est une base de B. et dim $B = 2$

---

3) • montrons que : $v_1 = (1,-1,2,-2)$ et $v_2 = (0,0,-1,1)$ sont deux éléments de A.

Comme $1 + (-1) = 2 + (-2) = 0$ alors $v_1 \in A$

et comme $0 + 0 = -1 + 1 = 0$ alors $v_2 \in A$.

• montrons que $\{v_1, v_2\}$ est libre.

Soient α et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que : $\alpha v_1 + \beta v_2 = \vec{0}$

alors $\alpha . (1,-1,2,-2) + \beta(0,0,-1,1) = (0,0,0,0)$

donc $(\alpha, -\alpha, 2\alpha, -2\alpha) + (0,0,-\beta,\beta) = (0,0,0,0) \Rightarrow$

$(\alpha, -\alpha, 2\alpha - \beta, -2\alpha + \beta) = (0,0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\alpha - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\alpha = \beta = 0 \Rightarrow$ le système $\{v_1, v_2\}$ libre.

et comme dim $A = 2$ donc (v_1, v_2) base de A $\Rightarrow$ $\{v_1, v_2\}$ engendre A.

4) soit $v_3 = (1, 0, 0, 0)$, $v_4 = (1, 1, 1, 1)$

Montrons que : (v_1, v_2, v_3, v_4) est une ~~base de~~ base de $\mathbb{R}^4$.

Comme $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ alors il suffit de montrer que : (v_1, v_2, v_3, v_4) est libre.

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dans $\mathbb{R}$ tels que.

$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \delta v_4 = (0, 0, 0, 0)$ alors.

$\alpha(-1, 1, 2, -2) + \beta(0, 0, -1, 1) + \gamma(1, 0, 0, 0) + \delta(1, 1, 1, 1) = (0,0,0,0)$

$(\ldots) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow (-\alpha + \gamma + \delta, \alpha + \delta, 2\alpha - \beta + \gamma, -2\alpha + \beta + \gamma) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow$

$$\begin{cases} -\alpha + \gamma + \delta = 0 \\ \alpha + \delta = 0 \\ 2\alpha - \beta + \gamma = 0 \\ -2\alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{facile}} \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$$

donc (v_1, v_2, v_3, v_4) est libre $\Rightarrow (v_1, v_2, v_3, v_4)$ base

---

Ex 5 $\quad v_1 = (-1, 1, 0)$; $v_2 = (1, 0, 2)$

F le sous-esp. ~~vect~~ engendré par v_1, v_2

le vecteur $v = (x, y, z) \in F$ si $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 /$
$v = \alpha v_1 + \beta v_2$

$\Rightarrow (x, y, z) = (-\alpha, \alpha, 0) + (\beta, 0, 2\beta) \Rightarrow (x, y, z) = (-\alpha + \beta, \alpha, 2\beta)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\alpha + \beta \\ y = \alpha \\ z = 2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = \beta \\ z = 2\beta \end{cases} \Rightarrow \boxed{z = 2(x + y)}$$

Suite de l'ex 5

2) Soit $V_3 = (0;1;2)$, on a $V_3 \in F$ car ses coordonnées vérifient la relation de la question 1 :

$$\boxed{z = 2(x+y)}$$

$$2 = 2(0+1)$$

d'où V_3 s'écrit comme combinaison linéaire de V_1 et V_2 : $(V_3 = V_1 + V_2)$ donc

$$\text{rang}(\{V_1, V_2, V_3\}) = \text{rang}(\{V_1, V_2\})$$

Comme le système $\{V_1, V_2\}$ est libre (facile à vérifier) alors $\text{rang}(\{V_1, V_2\}) = 2$

$$\Longrightarrow \text{rang}(\{V_1, V_2, V_3\}) = 3.$$

---

exercice 6

on pose $V_1 = (1,1,1)$; $V_2 = (1,-1,1)$ et $V_3 = (1,1,-1)$

(V_1, V_2, V_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ $\Longleftrightarrow$

(V_1, V_2, V_3) est libre (car dim $E = 3$ = nombre d'élém. de la famille)

soit α, β et γ 3 réels tels que

$$\alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3 = (0,0,0) \Rightarrow (\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha-\beta+\gamma,\ \alpha+\beta-\gamma) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 & (1) \\ \alpha-\beta+\gamma = 0 & (2) \\ \alpha+\beta-\gamma = 0 & (3) \end{cases}$$

$(1) - (2) \Rightarrow 2\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$

$(1) - (3) \Rightarrow 2\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0$

$(2) + (3) \Rightarrow 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

donc (V_1, V_2, V_3) libre $\Rightarrow$ (V_1, V_2, V_3) base de $\mathbb{R}^3$.

déterminons ~~une~~ les coordonnées d'un vecteur $X=(x,y,z)$ dans la base (V_1,V_2,V_3).

Soit (a,b,c) le triplet-coordonnées de X dans cette base alors $X = aV_1 + bV_2 + cV_3 \Rightarrow$

$$(x,y,z) = (a+b+c,\ a-b+c,\ a+b-c) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a+b+c = x & (1) \\ a-b+c = y & (2) \\ a+b-c = z & (3) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} (1)-(2) \\ (1)-(3) \\ (2)+(3) \end{array} \begin{cases} 2b = x-y \\ 2c = x-z \\ 2a = x+z \end{cases}$$

d'où les coordonnées de X par rapport à la base (V_1,V_2,V_3) sont :

$$\Rightarrow \quad a = \frac{x+y}{2}; \quad b = \frac{x-y}{2}, \quad c = \frac{x-y}{2}$$

